Ejercicios de Análisis Complejo
Relación 9

1. En cada uno de los siguientes casos, decidir si existe una función f holomorfa en un entorno del origen, verificando que $f(1/n) = a_n$ para todo número natural n suficientemente grande:

   a) $a_{2n} = 0,\ a_{2n-1} = 1\ \ \forall n \in \mathbb{N}$
   b) $a_{2n} = a_{2n-1} = \frac{1}{2n}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.
   c) $a_n = \frac{n}{n+1}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Sea f una función entera tal que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Prueba que $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

3. Sea f una función entera verificando que $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Pruébese que f es una función polinómica.

4. Sea f una función entera no constante verificando que $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$. Prueba que f es de la forma $f(z) = \alpha z^n$ donde n es un número natural y $|\alpha| = 1$.

5. Sea f una función holomorfa en el disco unidad verificando que $f(0) = 0$. Probar que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} f(z^n)$ converge en el disco unidad y que su suma es una función holomorfa en el disco unidad.

6. Da un ejemplo de dos funciones holomorfas en un dominio acotado que coincidan en infinitos puntos del mismo y no sean idénticas. Considera también el caso de que el dominio no sea acotado.

7. Sea f una función entera no constante. Dado un número $\rho > 0$, definamos:

$$E_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < \rho\}, \quad F_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leqslant \rho\}$$

   a) Prueba que la adherencia de E_ρ es igual a F_ρ.

   b) Justifica que en cada componente conexa acotada de E_ρ hay por lo menos un cero de f.

8. Sea $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y no constante. Se define

$$M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\} \quad (0 < r < 1).$$

   a) Prueba que la función M es estrictamente creciente.

   b) Supongamos que hay un número natural, n, tal que para todo $r \in]0,1[$ es $M(r) = r^n$, y deduce que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in D(0,1)$, donde $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$.